Загальні методи розв'язування рівнянь, нерівностей та їх систем

Загальні методи розв'язування рівнянь, нерівностей та їх систем

Сайт:	Підготовка до ЗНО - Освітній портал "Академія"
Курс:	Підготовка до ЗНО з математики. Алгебра.
Книга:	Загальні методи розв'язування рівнянь, нерівностей та їх систем
Надруковано:	Гість
Дата:	Monday 20 April 2020 4:46 PM

Зміст

Рівносильні рівняння. Системи і сукупності рівнянь з однією змінною

1. Рівносильні рівняння

Два рівняння називаються *рівносильними*, якщо вони мають одні й ті самі корені або не мають їх зовсім. Знак рівносильності рівнянь – $\Leftrightarrow$.

Наприклад:

1) $x+1=3 \Leftrightarrow x-1=1$, оскільки вони мають корінь x=2;

2) $x-1=x \Leftrightarrow x^2=-1$.

2. Системи і сукупності рівнянь з однією змінною

Система рівнянь – це рівняння, відносно яких ставиться задача знайти їхні спільні корені. Знак системи – {.

$$\Delta^2+\nabla^2=0 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta=0, \\ \nabla=0; \end{cases} \quad \Delta=\nabla \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta 2=\nabla 2, \\ \Delta\cdot\nabla\geq 0; \end{cases} \quad \frac{\Delta}{\nabla}=\frac{*}{\bigcirc} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta\cdot\bigcirc=*\cdot\nabla, \\ \nabla\neq 0, \\ \bigcirc\neq 0. \end{cases}$$

Наприклад:

$$(x^2-1)^2+(x-1)^2=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-1=0, \\ x-1=0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\pm 1, \\ x=1; \end{cases} \Leftrightarrow x=1$$

Сукупність рівнянь – це рівняння, відносно яких ставиться задача знайти всі їхні корені. Знак сукупності – [.

$$\Delta\cdot\nabla=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \Delta=0, \\ \nabla=0. \end{array} \right.$$

Наприклад:

$$(x-1)(x-2)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-1=0, \\ x-2=0; \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1, \\ x=2; \end{array} \right. \Leftrightarrow x=1, x=2.$$

Методи розв'язування рівнянь

Розкладання на множники

Добуток кількох множників дорівнює нулю, якщо хоча б один із них дорівнює нулю, а останні при цьому існують.

Наприклад:

$$(x^2-4)\sqrt{x+1}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x^2-4=0, \\ x+1=0, \end{array}\right. \\ x+1\geq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=2, \\ x=-2, \\ x=-1, \end{array}\right. \\ x\geq -1; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x\in\{-1;2\}.$$

Заміна змінних

Наприклад: $(x^2+3x)^2+2(x^2+3x)-120=0$

$$\begin{cases} x^2+3x=t, \\ t^2+2t-120==0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+3x=t, \\ (t-10)(t+12)=0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x^2+3x=t, \\ \left[\begin{array}{l} t=10, \\ t=-12; \end{array}\right. \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+3x=10, \\ x^2+3x=-12; \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+3x-10=0, \\ x^2+3x+12=0; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (x+5)(x-2)=0, \\ x\in\emptyset; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2, \\ x=-5; \end{array}\right. \Leftrightarrow x\in\{-5;2\}.$$

Порівняння обох частин рівняння за величиною

Наприклад: $\sin^5 x-\cos^{20}x=1 \Leftrightarrow \sin^5 x=\cos^{20}x+1$.

Оскільки $\sin^5 x\leq 1; 1+\cos^{20}x\geq 1$, то

$$\begin{cases} \sin^5 x=1, \\ \cos^{20}x=0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x=1, \\ \cos x=0; \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+2\pi n, n\in Z.$$

Використання однорідності

$$a(F(x))^2+b(F(x)G(x))+c(G(x))^2=0$$

Наприклад: $3(x+8)^2-4(x+8)(x^2+2x+2)+(x^2+2x+2)^2=0$.

Нехай $x+8=a,\ x^2+2x+2=b$, тоді

$3a^2-4ab+b^2=0,\ a_{1,2}=\frac{2b\pm b}{3};\ a=b$ або $a=\frac{b}{3}$.

Тоді

$$\left[\begin{array}{l} 8+x=x^2+2x+2, \\ 3x+24=x^2+2x+2; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+x-6=0, \\ x^2-x-22=0; \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x=-3, \\ x=2, \end{array}\right. \\ x=\frac{1\pm\sqrt{89}}{2}; \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x\in\{-3;2;\tfrac{1\pm\sqrt{89}}{2}\}.$$

Використання монотонності

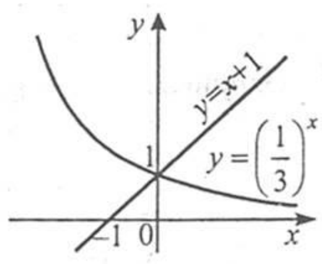
Наприклад: $3^x+4^x=5^x \Leftrightarrow (\frac{3}{5})^x+(\frac{4}{5})^x=1$.

Функція $f(x)=(\frac{3}{5})^x+(\frac{4}{5})^x$ спадна, $f(2)=(\frac{3}{5})^2+(\frac{4}{5})^2=1$. Отже, x=2 – єдиний корінь.

Графічний метод

Щоб графічно розв’язати рівняння $f(x)=g(x)$, треба побудувати графіки функцій $y=f(x)$ і $y=g(x)$ і знайти абсциси точок їх перетину.

Наприклад: $(\frac{1}{3})^x=x+1$.



Відповідь: x=0.

Нерівносильні перетворення

Можуть призвести до втрати коренів	
Неправильне розв'язування: $x(x+3)=2x; x+3=2;$ $x=-1; x\in\{-1\}$ Втрачено корінь x=0.	Правильне розв'язування $x^2+3x-2x=0; x^2+x=0; x(x+1)=0;$ $x=0$ або $x+1=0, x=-1$ $x\in\{0;-1\}$
Можуть призвести до появи сторонніх коренів	
Неправильне розв'язування $\frac{x^2+x-1}{x-1}=\frac{4x-3}{x-1}; x^2+x-1=4x-3;$ $x=2, x\in\{1,2\}$ або $x=2, x\in\{1,2\}$ Корінь x=1 – сторонній	Правильне розв'язування $\frac{x^2+x-1}{x-1}=\frac{4x-3}{x-1}; \begin{cases} x^2+x-1=4x-3, \\ x-1\neq 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x^2-3x+2=0, \\ x\neq 1; \end{cases} \quad x\in\{2\}$

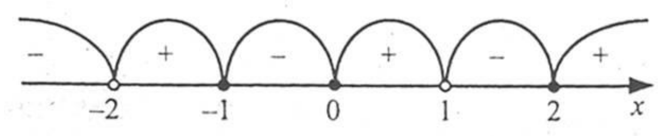
Методи розв’язання нерівностей

Метод інтервалів

Щоб розв’язати нерівність $f(x) > 0,\ f(x) < 0$, де $f(x) = \frac{(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)}{(x-a_{m+1})(x-a_{m+2})\ldots(x-a_{m+n})}$, де $a_1, a_2, \ldots, a_n$ – різні числа, треба:

1. зобразити $a_1, a_2, \ldots, a_n$ на координатній прямій (ці числа, розташовані у порядку зростання, розділяють пряму на проміжків, на яких функція $f(x)$ зберігає свій знак);
2. визначити знаки функції $f(x)$ на кожному проміжку;
3. записати відповідь.

Наприклад: $\frac{x(x-2)(x+1)}{(x+2)(x-1)} \geq 0$.



$x \in (-2; -1] \cup [0; 1) \cup [2; +\infty)$.

Відповідь: $x \in (-2; -1] \cup [0; 1) \cup [2; +\infty)$.

Узагальнений метод інтервалів

Щоб розв’язати нерівність $f(x) > 0,\ f(x) < 0$, треба:

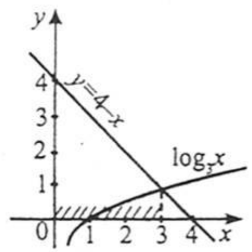
1. знайти область визначення функції $y=f(x)$;
2. знайти нулі функції ($f(x)=0$);
3. на координатній прямій позначити нулі функції і визначити знак функції на кожному проміжку, на які розбивають нулі функції область визначення;
4. записати відповідь (вибрати ті інтервали, де функція має потрібний знак).

Графічний метод

Щоб розв’язати нерівність $f(x)>g(x)$, треба побудувати графіки функцій $y=f(x)$, $y=g(x)$ і вибрати ті проміжки осі абсцис, на яких графік функції $y=f(x)$розташований вище графіка функції $y=g(x)$.

Щоб розв’язати нерівність $f(x)<g(x)$, треба побудувати графіки функцій $y=f(x)$, $y=g(x)$ і вибрати ті проміжки осі абсцис, на яких графік функції $y=f(x)$розташований нижче графіка функції $y=g(x)$.

Наприклад: $\log_3 x \leq 4 - x, x \in (0; 3]$.



Відповідь:$x \in (0; 3]$.

Методи розв'язування систем рівнянь

Правило переходу до совокупності

$$\begin{cases} f_1(x;y)f_2(x;y)=0, \\ F(x;y)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f_1(x;y)=0, \\ F(x;y)=0; \end{cases} \\ \begin{cases} f_2(x;y)=0, \\ F(x;y)=0 \end{cases} \end{array} \right.$$

Правило додавання

$$\begin{cases} f(x;y)=g(x;y), \\ f_1(x;y)=g_1(x;y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x;y)=g(x;y), \\ f_1(x;y)+kf(x;y)=g_1(x;y)+kg(x;y) \end{cases}$$

Правило підстановки

$$\begin{cases} y=f(x), \\ F(x;y)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=f(x;y), \\ F(x;f(x))=0 \end{cases}$$

Зведення системи рівнянь до об'єднання простіших систем

Наприклад: Розв'яжіть систему

$$\begin{cases} x^2-5xy+4y^2=0, \\ x+y=3. \end{cases}$$

Розв'язання

$$\begin{cases} x^2-5xy+4y^2=0, \\ x+y=3; \end{cases} \begin{cases} (x-y)(x-4y)=0, \\ x+y=3; \end{cases} \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-y=0, \\ x+y=3; \end{cases} \\ \begin{cases} x-4y=0, \\ x+3=0; \end{cases} \end{array} \right. \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2x=3, \\ 2y=3; \end{cases} \\ \begin{cases} 2x-3y=3, \\ 5y=3; \end{cases} \end{array} \right. \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=1,5, \\ y=1,5; \end{cases} \\ \begin{cases} x=2,4, \\ y=0,6. \end{cases} \end{array} \right.$$

Відповідь: (1,5; 1,5), (2,4; 0,6).

Спосіб уведення нових змінних

Наприклад: Розв'яжіть систему

$$\begin{cases} \frac{7}{\sqrt{x-7}}-\frac{4}{\sqrt{y+6}}=\frac{5}{3}, \\ \frac{5}{\sqrt{x-7}}+\frac{3}{\sqrt{y+6}}=\frac{13}{6}. \end{cases}$$

Розв'язання

$$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x-7}} = u, \\ \frac{1}{\sqrt{y+6}} = v, \\ 7u - 4v = \frac{5}{3}, \\ 5u + 3v = \frac{13}{6}; \end{cases} \begin{cases} 21u - 12v = 5, \\ 30u + 18v = 13; \end{cases} \begin{cases} 63u - 36v = 15, \\ 60u - 36v = 26; \end{cases} \begin{cases} 123u = 41, \\ 21u - 12v = 5; \end{cases} \begin{cases} u = \frac{1}{3}, \\ 7 - 12v = 5; \end{cases} \begin{cases} u = \frac{1}{3}, \\ v = \frac{1}{6}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x-7}} = \frac{1}{3}, \\ \frac{1}{\sqrt{y+6}} = \frac{1}{6}; \end{cases} \begin{cases} \sqrt{x-7} = 3, \\ \sqrt{y+6} = 6; \end{cases} \begin{cases} x - 7 = 9, \\ y + 6 = 36; \end{cases} \begin{cases} x = 16, \\ y = 30. \end{cases}$$

Відповідь: (16; 30).

Використання теореми Вієта

Наприклад: Розв’яжіть систему

$$\begin{cases} x + y = 5, \\ xy = 6. \end{cases}$$

Розв’язання

x і *y* – корені рівняння $a^2 - 5a + 6 = 0$.

Звідси *a*=2, *a*=3. Отже, розв’язками системи є пари (2;3), (3;2).

Відповідь: (2;3), (3;2).

Симетричні системи

Наприклад: Розв’яжіть систему

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ x + y = 7. \end{cases}$$

Розв’язання

$x + y = u;\ xy = v;\ (x+y)^2 = u^2;\ x^2 + 2xy + y^2 = u^2, x^2 + y^2 = u^2 - 2v.$

$$\begin{cases} x + y = u, \\ xy = v, \\ u^2 - 2v = 25, \\ u = 7; \end{cases} \begin{cases} x + y = u, \\ xy = v, \\ 49 - 2v = 25, \\ u = 7; \end{cases} \begin{cases} x + y = u, \\ xy = v, \\ v = 12, \\ u = 7; \end{cases} \begin{cases} x + y = 7, \\ xy = 12. \end{cases}$$

Звідси (3;4), (4;3).

Відповідь: (3;4), (4;3).