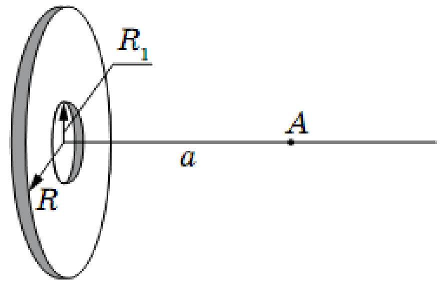
Напруженість електричного поля, однорідно зарядженого тонкого диску.

Як я вже попереджував, одна з формул на стор. 262 (Засекіна) – невірна. Дійсно, з малюнка слідує, що в такій формулі жодним чином не врахована відстань від диску до точки А, яка лежить на серединному його перпендикулярі, а саме: ***a***. З іншого боку, простий аналіз показує, що якщо отвір у диску відсутній ($R_1 = 0$), то напруженість в точці А акурат рівна напруженості поля рівномірно зарядженої нескінченної площини, що насправді має місце тільки тоді, коли точка А розташована безпосередньо поблизу центра диску.

Диск радіусом R	Напруженість поля в точці, що лежить на перпендикулярі, проведеному із центра диска, на відстані r від нього: $E = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0\varepsilon}\left(1 - \dfrac{R_1}{\sqrt{R^2 + R_1^2}}\right)$



З огляду на це було проаналізовано ряд джерел, проведено інтегрування і отримано дійсно вірну формулу, придатну для користування. Отже:

$$E = \frac{a\sigma}{2\varepsilon\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{R_1^2 + a^2}} - \frac{1}{\sqrt{R^2 + a^2}}\right). \qquad (1.1)$$

Ця формула для суцільного диску, без отвору ($R_1 = 0$) переходить в таку:

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon\varepsilon_0}\left(\frac{a}{a} - \frac{a}{\sqrt{R^2 + a^2}}\right) = \frac{\sigma}{2\varepsilon\varepsilon_0}\left(1 - \frac{a}{\sqrt{R^2 + a^2}}\right). \qquad (1.2)$$

Саме ця формула буде далі використана для розв'язування задачі 6 з впр. 44.

Кожен з вас може самостійно перевірити, що для нескінченно великих дисків ($R = \infty$) чи за умови $a = 0$ (для формули 1.2) ми отримуємо поле однорідно зарядженої нескінченної поверхні.

Цікавим є випадок, коли диск перетворюється в тонке заряджене кільце, тобто коли $R_1 \to R$. Пряма підстановка у (1.1) таких значень результату не дає. Інтегральний розв'язок дає таку формулу:

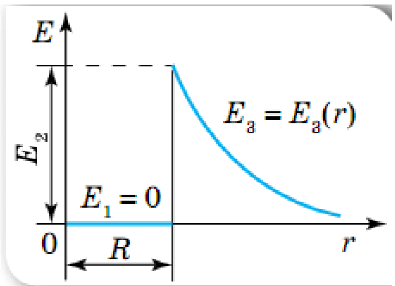
$$E = \frac{\tau}{2\varepsilon\varepsilon_0} \cdot \frac{R \cdot a}{\sqrt{\left(R^2 + a^2\right)^3}} = \frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0} \cdot \frac{a}{\sqrt{\left(R^2 + a^2\right)^3}}, \qquad (1.3)$$

де замість поверхневої густини заряду σ слід брати лінійну $\tau = \dfrac{q}{2\pi R}$.

Приклади розв'язування задач.

Задача з підручника Засекіна на стор. 263-264.

Задача. На суцільній металевій сфері радіусом R = 20 см рівномірно розподілений заряд з поверхневою густиною $\sigma = 10^{-9}\ \frac{\text{Кл}}{\text{м}^2}$. Визначте напруженість електричного поля в точках: на відстанях r_1 = 16 см від центра сфери; на поверхні сфери та на відстані r_2 = 36 см від центра сфери. Побудуйте графіки залежності $E = E(r)$.



Мал. 249

Дано:

$R = 0{,}2$ м

$\sigma = 10^{-9}\ \frac{\text{Кл}}{\text{м}^2}$

$r_1 = 0{,}16$ м

$r_2 = 0{,}36$ м

E_1, E_2, E_3 — ?

Розв'язання:

Усередині сфери напруженість поля дорівнює нулю: $E_1 = 0$ (для $r = r_1$).

Заряджена сфера створює навколо себе поле, напруженість якого визначається за формулою точкового заряду.

Для $r = R$ $\qquad E_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{q}{R^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{4\pi R^2\sigma}{R^2} = \frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0}, \qquad E_2 = 113\ \frac{\text{В}}{\text{м}}.$

Для $r = r_2$ $\qquad E_3 = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{q}{r_2^2} = \frac{R^2\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0 r_2^2}, \qquad E_3 = 34{,}5\ \frac{\text{В}}{\text{м}}.$

Графік наведено на малюнку 249.

Відповідь: 0 В; 113 $\frac{\text{В}}{\text{м}}$; 34,5 $\frac{\text{В}}{\text{м}}$.

Задача розв'язана вірно, от тільки в останньому випадку точніше значення E_3 = 34,9 В/м.

Задача 6, Вправа 44 (Засекіна)

6. Визначте напруженість електричного поля в точці A, що розташована на відстані $r = 5$ см від зарядженого диска вздовж нормалі, установленої в його центрі. За якого граничного значення радіуса R диска поле в точці A не буде відрізнятись більше ніж на 2 % від поля нескінченної площини? Яка напруженість поля в точці A, якщо радіус диска дорівнює $R = 10r$? У скільки разів напруженість, обчислена в цьому випадку, відрізняється від напруженості поля нескінченної площини?

Дано	
$r = 5\,см = 0{,}05\,м$ 1) $\delta = \dfrac{\lvert E - E_0\rvert}{E_0} = 2\% = 0{,}02$ 2) $R = 10r$	
1) $R - ?$ 2) $E - ?,\ \dfrac{E}{E_0} - ?$	

Розв'язування. Скористаємося вірною формулою для напруженості поля суцільного однорідно зарядженого диска (1.2):

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon\varepsilon_0}\left(1 - \frac{r}{\sqrt{R^2 + r^2}}\right),$$

при цьому, відповідно до умов задачі відстань від диска позначена як ***r***, а не ***a***.

Напруженість поля нескінченної площини описується як:

$$E_0 = \frac{\sigma}{2\varepsilon\varepsilon_0}.$$

Отже, згідно з умовою 1) задачі маємо:

$$\delta = \frac{\lvert E - E_0\rvert}{E_0} = \frac{\left|\dfrac{\sigma}{2\varepsilon\varepsilon_0}\left(1 - \dfrac{r}{\sqrt{R^2 + r^2}}\right) - \dfrac{\sigma}{2\varepsilon\varepsilon_0}\right|}{\dfrac{\sigma}{2\varepsilon\varepsilon_0}} = \frac{r}{\sqrt{R^2 + r^2}} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \delta^2 \cdot \left(R^2 + r^2\right) = r^2 \quad \Rightarrow \quad \delta^2 R^2 + \delta^2 r^2 = r^2 \quad \Rightarrow \quad R^2 = \frac{(1 - \delta^2)\cdot r^2}{\delta^2} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad R = r \cdot \sqrt{\frac{1}{\delta^2} - 1}.$$

Обчислюємо:

$$R = 0{,}05\,м \cdot \sqrt{\frac{1}{0{,}02^2} - 1} = 0{,}05\,м \cdot \sqrt{2500 - 1} \approx 2{,}4995\,м.$$

2) Якщо $R = 10r$, то

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon\varepsilon_0}\left(1 - \frac{r}{\sqrt{(10r)^2 + r^2}}\right) = \frac{\sigma}{2\varepsilon\varepsilon_0}\cdot\left(1 - \frac{1}{\sqrt{100 + 1}}\right) \approx \frac{\sigma}{2\varepsilon\varepsilon_0}\cdot 0{,}9005.$$

Тоді

$$\frac{E}{E_0} = \frac{\dfrac{\sigma}{2\varepsilon\varepsilon_0}\cdot\left(1 - \dfrac{1}{\sqrt{100 + 1}}\right)}{\dfrac{\sigma}{2\varepsilon\varepsilon_0}} \approx 0{,}9005 \quad \Rightarrow \quad \frac{E_0}{E} \approx 1{,}1105.$$

Зауважте, що у Засекіної у відповіді конкретне значення напруженості поля $E = 113$ *кВ/м*, яке неможливо отримати, оскільки не задано значення поверхневої густини заряду.